آزمـــون شبیه ســاز امتحـــان نهـــایـــی مـــاز

دوازدهم ریاضی

شبیه ساز امتحانات نهایی

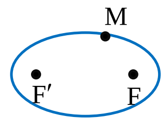
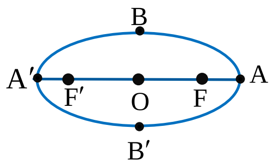
گروه آموزشی ماز

پیش‌بینی امتحان نهایی

خردادماه ۱۴۰۳

ردیف	درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
۱	هندسه	۲	۱۳۵

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **هندسه ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۳۵ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
	سؤالات فصل اول	
۱	اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ \alpha & \beta\end{bmatrix}$ و $AB=BA$، α و β را بیابید.	۱/۵
۲	اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i.j & i>j\\ i^2 & i=j\\ 2i-j & i<j\end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $2A-3I$ را به دست آورید.	۱
۳	از رابطه $\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ ماتریس A را بیابید.	۱/۵
۴	اگر $A=\begin{bmatrix}2\left\|A\right\| & \left\|A\right\|\\ 2 & \left\|A\right\|\end{bmatrix}$ یک ماتریس باشد و $\left\|A\right\|\neq 0$، آن‌گاه مقدار عبارت $\left\|A\right\|(\left\|A\right\|^2-1)$ را بیابید.	۱
	سؤالات فصل دوم	
۵	الف) مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند برابر .... است. ب) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر ۱ باشد، بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود. (درست – نادرست)	۰/۵
۶	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(-2,1)$ و بر خط به معادلهٔ $4x+3y-5=0$ مماس باشد.	۱
۷	وضعیت دو دایره زیر را نسبت به هم تعیین کنید. $x^2+y^2-8x+4y+11=0$ و $x^2+y^2-8x-2y+16=0$	۱/۷۵
۸	نقاط A، B، C و D در صفحه مفروضند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد. (بحث کنید)	۱
۹	در شکل زیر، نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $NF'=MF'$. 	۱
۱۰	در بیضی مقابل، طول قطر بزرگ ۲ برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟ 	۱
۱۱	معادلهٔ یک سهمی را بنویسید که کانون آن نقطهٔ $F(2,1)$ بوده و خط هادی آن به معادلهٔ $x=4$ باشد.	۱
۱۲	مختصات کانون و معادله خط هادی سهمی به معادله $2x^2-4x+3y=4$ را بیابید.	۰/۷۵
	ادامهٔ سؤالات در صفحهٔ بعد	

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **هندسه ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۳۵ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۲ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) [استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	نمره
	سؤالات فصل سوم	
۱۳	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه $2 \le y \le x^2$ را رسم کنید.	۰/۵
۱۴	الف) اگر $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ بردارهای یکه در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند، حاصل $\vec{k}.(\vec{i}\times\vec{j})$ برابر است با .... ب) اگر برای دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$، در این صورت، $\theta=\frac{\pi}{2}$ است. (θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است). (درست – نادرست) پ) نقطه $A(2m+1, m+2, m-1)$ روی صفحهٔ xoy قرار دارد. تصویر این نقطه بر صفحهٔ xoz کدام است؟ ۱) $(0,3,0)$ ۲) $(3,0,0)$ ۳) $(3,0,0)$ ۴) $(3,3,0)$ ت) زاویه بین دو بردار یکهٔ $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 120° است. زاویه بین بردارهای $\vec{a}-\vec{b}$ و $2\vec{a}+4\vec{b}$ کدام است؟ ۱) 30° ۲) 60° ۳) 90° ۴) 120°	۱
۱۵	ثابت کنید دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند اگر و تنها اگر $\vec{a}.\vec{b}=0$.	۱
۱۶	اگر $\vec{a}=(2,-1,1)$ و $\vec{b}=(-1,2,0)$ و $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$ باشند، تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ بر امتداد بردار $2\vec{c}-\vec{b}$ را بیابید.	۱/۵
۱۷	اگر $\vec{a}=(-2,0,1)$ و $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ باشند، مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a}-\vec{j}$ و $\vec{b}$ تولید می‌شود را حساب کنید.	۱
۱۸	اگر $\|\vec{a}\|=10$ و $\|\vec{b}\|=2$ و $\vec{a}.\vec{b}=12$ باشند و زاویه بین دو بردار حاده باشد، مقدار $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$ را محاسبه کنید.	۱
۱۹	سه بردار $\vec{a}=(2,3,1)$ و $\vec{b}=(-1,1,0)$ و $\vec{c}=(2,1,-2)$ مفروضند. حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود را به دست آورید.	۱
	موفق باشید.	۲۰

آزمون
شبیه ساز
امتحان
نهایی
ماز

دوازدهم ریاضی

شبیه ساز امتحانات نهایی

گروه آموزشی ماز

پاسخبرگ آزمون

پیش‌بینی امتحان نهایی

خردادماه ۱۴۰۳

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **هندسه ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۳۵ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۴ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌برگ	نمره
	پاسخ‌های خود را به‌صورت دقیق، خوش‌خط و مرتب در این برگه وارد کنید.	
۱		۱/۵
۲		۱
۳		۱/۵
۴		۱
۵	الف) .... ب)	۰/۵
۶		۱

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **هندسه ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۳۵ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۴ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌برگ	نمره
۷		۱/۷۵
۸		۱
۹		۱
۱۰		۱

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **هندسه ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۳۵ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۴ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌برگ	نمره
۱۱		۱
۱۲		۰/۷۵
۱۳		۰/۵
۱۴	الف) .... ب) .... پ) .... ت)	۱
۱۵		۱

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **هندسه ۳**	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: **خردادماه ۱۴۰۳**	مدت امتحان: **۱۳۵ دقیقه**
نام و نام خانوادگی:	رشته: **ریاضی فیزیک**	پایهٔ **دوازدهم** دورهٔ متوسطه	تعداد صفحات: **۴ صفحه**
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		**گروه آموزشی ماز**	

ردیف	پاسخ‌برگ	نمره
۱۶		۱/۵
۱۷		۱
۱۸		۱
۱۹		۱
	موفق باشید.	۲۰

آزمون شبیه ساز امتحان نهایی ماز

دوازدهم ریاضی

پیش‌بینی امتحان نهایی

گروه آموزشی ماز

خردادماه ۱۴۰۳

پاسخنامهٔ تشریحی (حاوی راهنمای مصحّح)

درس	مسئول درس	ویراستاران
هندسه	محدثه شیخعلی - جواد نظری	علیرضا کاظمی بقا - ارسلان حسنوند

راهنمای پاسخنامه برای بچه‌های مازی!

مصحح شو:

پاسخ دقیق سؤال این‌جا میاد و اسمش روشه: «مصحح شو»، می‌خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این‌جا بهتون گفتیم.

بررسی دقیق‌تر:

اگه پاسخ کوتاه یه سؤال کافی نباشه تا ببینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌ترِ جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

نقشهٔ نهایی:

امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاورهٔ حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

۲۰ شو:

توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درس‌نامه‌هاش دقیقاً فاصلهٔ بین نمرهٔ خوب و نمرهٔ ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

نکتهٔ طلایی:

با وجود «۲۰ شو»، که کلی درس‌نامهٔ مفصل داره، باز هم اگه نکتهٔ مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.

ردیف	پاسخ‌نامه	نمره
۱	مصحح شو!	۱/۵

$$BA=\begin{bmatrix} ۵ & -۱ \\ -\alpha+۳\beta & \alpha-\beta \end{bmatrix}\ (۰/۵)$$

$$AB=\begin{bmatrix} \alpha-۱ & \beta-۲ \\ ۳-\alpha & ۶-\beta \end{bmatrix}\ (۰/۵) \quad \Rightarrow \underbrace{\alpha=۶}_{(۰/۲۵)},\ \underbrace{\beta=۱}_{(۰/۲۵)}$$

تساوی بین دو ماتریس:

دو ماتریس هم‌مرتبه $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ با هم برابرند اگر و تنها اگر درایه‌های آن‌ها نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند.

مثال: اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-۱ & ۸ \\ ۳ & z+۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} y+۱ & x-۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ مساوی باشند مقدار $(x+y+z)$ را بیابید.

$$\begin{cases} x-۲=۸\rightarrow x=۱۰ \\ y+۱=x-۱\rightarrow y=x-۲\xrightarrow{x=۱۰} y=۱۰-۲=۸ \\ z+۱=۴\rightarrow z=۳ \end{cases}$$

$$\rightarrow x+y+z=۱۰+۸+۳=۲۱$$

جمع و تفریق ماتریس‌ها:

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبه کافی است که درایه‌های دو ماتریس را نظیربه‌نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم.

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس: برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس A، آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس A ضرب می‌کنیم.

قرینه یک ماتریس:

اگر A یک ماتریس دلخواه باشد، قرینه ماتریس A از ضرب عدد (۱-) در ماتریس A به دست می‌آید که آن را با $(-A)$ نشان می‌دهیم.

نکته: برخی از خواص جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس: اگر A، B و C ماتریس‌های هم‌مرتبه و r و s اعدادی حقیقی باشند، داریم:

- $A+B=B+A$
- $A+(B+C)=(A+B)+C$
- $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$
- $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$
- $r(A\pm B)=rA\pm rB$
- $(r\pm s)A=rA\pm sA$
- $rA=rB\ ,\ r\neq ۰\rightarrow A=B$
- $A=B\rightarrow rA=rB$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & m+۱ \\ ۲n+۴ & ۵ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد با محاسبه m و n، ماتریس $A+I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است.)

$$\begin{cases} m+۱=۰\rightarrow m=-۱ \\ ۲n+۴=۰\rightarrow n=-۲ \end{cases}\rightarrow A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$A+I=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}$$

مثال: دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، آیا جمع دو ماتریس A و B تعریف می‌شود؟ چرا؟

خیر ـ زیرا دو ماتریس A و B هم‌مرتبه نیستند.

ضرب ماتریس‌ها:

در حالت کلی دو ماتریس A و B زمانی ضرب‌پذیر هستند که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد به عبارت دیگر:

$$A_{m\times \underset{\downarrow}{p}}\times B_{\underset{\downarrow}{p}\times n}=C_{m\times n}$$

برابر

• **ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی:** اگر A ماتریس سطری و B ماتریس ستونی باشد برای پیدا کردن حاصل $A\times B$، کافی است هر درایه ماتریس A را در درایه نظیرش در ماتریس B ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم، ببینید:

$$A\times B=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{۱۱} \\ b_{۲۱} \\ \vdots \\ b_{n۱} \end{bmatrix}=a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱}+\dots a_{۱n}b_{n۱}$$

• **ضرب ماتریس در ماتریس:** ماتریس $A_{m\times p}$ و $B_{p\times n}$، مفروضند. حاصل $A\times B$، ماتریسی مانند $C_{m\times n}$ است که هر درایه آن از ضرب یک سطر ماتریس A در یک ستون ماتریس B به دست می‌آید به عبارت دیگر:

درایه سطر i اُم و ستون j اُم ماتریس C $=\begin{bmatrix} \text{سطر } i \text{ ام ماتریس } A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{ستون} \\ j \text{ ام} \\ \text{ماتریس } B \end{bmatrix}$

مثال: مقادیر x و y را از معادله زیر به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} x & ۲ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & y-۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & ۲ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲x & ۴x-۲ \end{bmatrix}$$

ماتریس $\begin{bmatrix} ۲x & ۴x-۲ \end{bmatrix}$ باید با ماتریس $\begin{bmatrix} ۴ & y-۲ \end{bmatrix}$ برابر باشد:

$$\begin{cases} ۲x=۴\to x=۲ \\ ۴x-۲=y-۲\xrightarrow{x=۲}۶=y-۲\to y=۸ \end{cases}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix}$$

حال برای اینکه ماتریس حاصل، ماتریسی قطری باشد، باید:

$$\begin{cases} -۸+۲a=۰\to a=۴ \\ b-۳=۰\to b=۳ \end{cases}$$

مثال: دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & m-۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ n+۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروضند. اگر A یک ماتریس قطری باشد حاصل AB را محاسبه کنید.

می‌دانیم که A یک ماتریس قطری است، پس:

$$\begin{cases} m-۲=۰\to m=۲ \\ n+۱=۰\to n=-۱ \end{cases}$$

حال حاصل AB برابر است با:

$$AB=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۲ \\ ۶ & ۰ & -۳ \\ ۹ & -۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

خواص عمل ضرب ماتریس‌ها:

۱) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$AB \neq BA$$

۲) اگر A ماتریس مربعی مرتبه n و I ماتریس واحد (همانی) مرتبه n باشد آن‌گاه ماتریس I عضو خنثی برای عمل ضرب است به عبارت دیگر:

$$AI = IA = A$$

۳) ضرب ماتریس A در $(B \pm C)$، خاصیت توزیع‌پذیری یا پخش را دارد:

$$A(B \pm C) = AB \pm AC$$

۴) ضرب ماتریس A در (BC)، خاصیت شرکت‌پذیری را دارد:

$$A(BC) = (AB)C$$

۵) در حالت کلی قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست به عبارت دیگر اگر برای ماتریس‌های متمایز A، B و C داشته باشیم، $AB = AC$، آن‌گاه لزوماً $B = C$ نیست.

مثال: معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰$ را حل کنید.

ابتدا حاصل‌ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ را محاسبه کرده و سپس آن را در ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-۳ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-۳ & ۱۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳x-۲۱ \end{bmatrix}$$

می‌دانیم که حاصل به‌دست آمده باید برابر صفر باشد، پس:

$$۳x - ۲۱ = ۰ \to ۳x = ۲۱ \to x = ۷$$

توان در ماتریس: اگر A یک ماتریس مربعی باشد توان‌های صحیح و نامنفی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

- $A^۰ = I$
- $A^۱ = A$
- $A^۲ = A \times A$
- $A^۳ = A \times A^۲ = A^۲ \times A$
- $A^۴ = A \times A^۳ = A^۳ \times A = A^۲ \times A^۲$

$\vdots$

- $A^n = A \times A^{n-۱} = A^{n-۱} \times A = \ldots$

- **ویژگی‌های توان در ماتریس:**

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، داریم:

- $A^m \times A^n = A^n \times A^m = A^{(m+n)}$
- $(A^m)^n = (A^n)^m = A^{mn}$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد ماتریس $A^۲$ را به دست آورید.

$$A^۲ = A \times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۶ \\ -۳ & ۷ & ۶ \\ -۲ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد ماتریس A^7 را به دست آورید.

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=-2I$$

$$A^7=(A^2)^3\times A=(-2I)^3\times A=-8\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -16 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال: اگر ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix}$ باشند، مقادیر a و b را چنان بیابید که داشته باشیم: $A^2-B=\bar{O}$

($\bar{O}$ ماتریس صفر است.)

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2-B=\bar{O}\to A^2=B\to\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{cases} a+b=5 \\ 4a+b=5 \end{cases}\to\begin{cases} a=0 \\ b=5 \end{cases}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر m و n را طوری بیابید که رابطه $A^2=mA+nI_2$ برقرار باشد. (I_2 ماتریس همانی است.)

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$mA+nI_2=m\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}+n\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 4m \\ 2m & m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & 4m \\ 2m & m+n \end{bmatrix}$$

می‌دانیم که رابطه $A^2=mA+nI_2$ باید برقرار باشد، یعنی:

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & 4m \\ 2m & m+n \end{bmatrix}\to\begin{cases} n=8 \\ m=1 \end{cases}$$

۲

مصحح شو!

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}}_{(0/25)},\ 2A-3I=\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}}_{(0/25)}+\underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{(0/25)}=\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 12 & 15 \end{bmatrix}}_{(0/25)}$$

۱

یکم یادآوری داشته باشیم...

- هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی را که شامل تعدادی سطر و ستون باشد یک ماتریس می‌گوییم.
- هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه آن ماتریس می‌گوییم.
- در حالت کلی اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد آن را به صورت $A_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم و می‌گوییم A ماتریسی از مرتبه $m\times n$ است.
- برای هر درایه ماتریس دو اندیس تعریف می‌کنیم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستون آن را مشخص می‌کند به عبارت دیگر a_{ij} یعنی درایه روی سطر i اُم و ستون j اُم.
- اگر ماتریس A را به صورت $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ نمایش دهیم در این صورت به a_{ij}، درایه عمومی ماتریس A می‌گوییم که در آن $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$ تغییر می‌کنند.

مثال: اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۴}$ ماتریس ۳×۴ باشد به طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^۲$، در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

عبارت سؤال را به صورت مقابل خلاصه می‌کنیم:

$$a_{ij}=\begin{cases} i+j & i>j \\ ۷ & i=j \\ i^۲ & i<j \end{cases}$$

- درایه‌های $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$ و $a_{۳۳}$ که در آن‌ها $i=j$ است برابر ۷ می‌باشند.
- درایه‌های $a_{۱۲}$، $a_{۱۳}$، $a_{۱۴}$، $a_{۲۳}$، $a_{۲۴}$ و $a_{۳۴}$ که در آن‌ها $i<j$ است برابر $i^۲$ می‌باشند.
- درایه‌های $a_{۲۱}$، $a_{۳۱}$ و $a_{۳۲}$ که در آن‌ها $i>j$ است برابر $i+j$ می‌باشند.

$$A=\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$$

مثال: اگر ماتریس A به صورت $A=[۳i-۲j]_{۳\times۳}$ باشد آن را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

$$A=\begin{bmatrix} ۳-۲ & ۳-۴ & ۳-۶ \\ ۶-۲ & ۶-۴ & ۶-۶ \\ ۹-۲ & ۹-۴ & ۹-۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۷ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس A به صورت $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ j & i>j \\ ۰ & i<j \end{cases}$ است. این ماتریس را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

- در درایه‌های $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$ و $a_{۳۳}$، $i=j$ است.
- در درایه‌های $a_{۱۲}$، $a_{۱۳}$ و $a_{۲۳}$، $i<j$ است.
- در درایه‌های $a_{۲۱}$، $a_{۳۱}$ و $a_{۳۲}$، $i>j$ است.

مثال: اگر $A=\left[a_{ij}\right]$ یک ماتریس ۳×۳ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} i-j & i<j \\ ۲ & i=j \\ i+j & i>j \end{cases}$ باشد درایه‌های $a_{۳۳}$، $a_{۳۱}$ و $a_{۱۲}$ را به دست آورید.

$$\begin{cases} a_{۳۳}\xrightarrow{i=j}۲ \\ a_{۳۱}\xrightarrow{i>j}۳+۱=۴ \\ a_{۱۲}\xrightarrow{i<j}۱-۲=-۱ \end{cases}$$

تمرین: اگر ماتریس‌های $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$، $B=\left[b_{ij}\right]_{۳\times۳}$ به صورت‌های زیر معرفی شده باشند، آن‌ها را با درایه‌هایشان مشخص کنید:

$$b_{ij}=\begin{cases} i^۲+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases} \qquad a_{ij}=\begin{cases} i^۲-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases}$$

۳	مصحح شو!	۱/۵

$\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} = -\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}$ (۰/۲۵) ، $\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} = -\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ (۰/۲۵)

$$A = \underbrace{\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}}_{(۰/۵)} = \underbrace{\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۶ & -۶ \\ -۱۰ & ۸ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۱۲ & -۲۱ \\ -۱۷ & ۳۰ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)}$$

وارون ماتریس:

برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی مانند B است به‌طوری که:

$$A \times B = B \times A = I$$

در این صورت ماتریس B را وارون ماتریس A می‌گوییم و آن را با $A^{-۱}$ نمایش می‌دهیم. حال اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد در این صورت وارون ماتریس A (یعنی $A^{-۱}$) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

توجه: شرط لازم و کافی برای اینکه $A^{-۱}$ وجود داشته باشد (A وارون‌پذیر باشد) این است که $|A| \neq ۰$ باشد.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A - ۲I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است.)

$$A - ۲I = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} - ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$|A - ۲I| = ۲$$

$$(A - ۲I)^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد حاصل عبارت $(۲A^{-۱} - ۳B^{-۱})$ را بیابید.

$$|A| = ۲۰ - ۶ = ۱۴ \rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} \rightarrow ۲A^{-۱} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$|B| = ۲ - (-۱۵) = ۱۷ \rightarrow B^{-۱} = \frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix} \rightarrow ۳B^{-۱} = \frac{۳}{۱۷}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow (۲A^{-۱} - ۳B^{-۱}) = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۷} & -\frac{۳}{۷} \\ -\frac{۲}{۷} & \frac{۴}{۷} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{۳}{۱۷} & \frac{۹}{۱۷} \\ -\frac{۱۵}{۱۷} & -\frac{۶}{۱۷} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱۰۶}{۱۱۹} & -\frac{۱۱۴}{۱۱۹} \\ \frac{۷۱}{۱۱۹} & \frac{۱۱۰}{۱۱۹} \end{bmatrix}$$

مثال: مقدار m را طوری بیابید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد.

برای اینکه ماتریس A وارون‌پذیر نباشد باید $|A| = ۰$ باشد، یعنی:

$$|A| = ۲m - ۴ = ۰ \rightarrow ۲m = ۴ \rightarrow m = ۲$$

ویژگی‌های وارون ماتریس: اگر A ماتریسی مربعی و وارون‌پذیر باشد، داریم:

- $(A^{-۱})^{-۱} = A$
- $(kA)^{-۱} = \frac{۱}{k} A^{-۱}$

- $(A^n)^{-۱} = (A^{-۱})^n$
- $(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$

مثال: ماتریس $A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ مفروض است، ماتریس A را به دست آورید.

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \rightarrow |A^{-۱}| = ۶ - (-۲) = ۸$$

می‌دانیم که $(A^{-۱})^{-۱} = A$ است پس باید وارون ماتریس $A^{-۱}$ را به دست بیاوریم:

$$(A^{-۱})^{-۱} = \frac{۱}{۸}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۸} & \frac{۱}{۸} \\ -\frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} \end{bmatrix}$$

حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی با استفاده از ماتریس وارون:

در حالت کلی هر دستگاه دو معادله و دو مجهولی به صورت $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ را می‌توان به شکل زیر نمایش داد که در آن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ را ماتریس ضرایب، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را ماتریس مجهولات و $B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ را ماتریس مقادیر معلوم می‌گوییم، ببینید:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}}_{B} \rightarrow AX = B$$

حال برای حل معادله ماتریسی $AX = B$، (به شرطی که A ماتریسی وارون‌پذیر باشد $(|A| \neq ۰)$)، با ضرب $A^{-۱}$ از سمت چپ در معادله $AX = B$ می‌توان مجهولات را به صورت زیر به دست آورد:

$$AX = B \xrightarrow[\text{از سمت چپ}]{\times A^{-۱}} A^{-۱}(AX) = A^{-۱}B \rightarrow \underbrace{(A^{-۱}A)}_{I} X = A^{-۱}B \rightarrow X = A^{-۱}B$$

مثال: دستگاه $\begin{cases} ۳x - ۵y = -۱ \\ ۲x + y = ۸ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

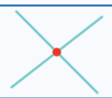
$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ۳ + ۱۰ = ۱۳ \rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow X = A^{-۱}B \rightarrow X = \frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} -۱ + ۴۰ \\ ۲ + ۲۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۲ \end{cases}$$

نکته: یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$، از دو معادله تشکیل شده است که هر یک معادله یک خط هستند حال اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$، ماتریس ضرایب این دستگاه باشد، داریم:

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$	دو خط متقاطع هستند.	$\lvert A \rvert \neq ۰$	دستگاه یک جواب یکتا دارد	
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$	دو خط موازی هستند.	$\lvert A \rvert = ۰$	دستگاه هیچ جوابی ندارد.	
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	دو خط بر هم منطبق هستند.	$\lvert A \rvert = ۰$	دستگاه بی‌شمار جواب دارد.	

مثال: مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx+۳y=-۳ \\ ۴x+(m+۴)y=۲ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

می‌دانیم شرط اینکه دستگاه فوق جواب نداشته باشد این است که $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد:

$$\frac{m}{۴}=\frac{۳}{m+۴}\neq\frac{-۳}{۲}$$

$$\frac{m}{۴}=\frac{۳}{m+۴}\to m(m+۴)-۱۲=۰\to\begin{cases} m=-۶ \\ m=۲ \end{cases}$$

$$\frac{۳}{m+۴}\neq-\frac{۳}{۲}\to m\neq-۶$$

بنابراین تنها $m=۲$ قابل قبول است.

۴

مصحح شو!

$$A=\begin{bmatrix} ۲|A| & |A| \\ ۲ & |A| \end{bmatrix}\Rightarrow \overbrace{|A|=۲|A|^۲-۲|A|}^{(۰/۲۵)}\Rightarrow ۲|A|^۲-۳|A|=۰\Rightarrow \underbrace{|A|(۲|A|-۳)=۰}_{(۰/۲۵)}$$

$$\xrightarrow{|A|\neq۰} ۲|A|-۳=۰\Rightarrow |A|=\frac{۳}{۲}\quad (۰/۲۵)$$

$$|A|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow (|A|^۲-۱)|A|=(\frac{۹}{۴}-۱)\times\frac{۳}{۲}=\frac{۵}{۴}\times\frac{۳}{۲}=\frac{۱۵}{۸}\quad (۰/۲۵)$$

بارم: ۱

۲۰ شو

دترمینان:

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی را نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. حال اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه n باشد $(۱\leq n\leq ۳)$ در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A)=|A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:

- $A=[k]_{۱\times۱}\to |A|=k$
- $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\to |A|=ad-bc$
- $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{بسط برحسب سطر اول}} |A|=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

توجه: برای محاسبه دترمینان ماتریس ۳×۳ در روش فوق، بسط را برحسب هر سطر یا هر ستون دلخواه می‌توان انجام داد.

مثال: دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را به دست آورید:

$$A=[-۳]\to |A|=-۳$$

$$A=\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}\to |A|=(-۱۰)-۱۲=-۲۲$$

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{برحسب سطر اول}} |A|=۲\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۰ & ۵ \end{vmatrix}-۱\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix}+(۰)\begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix}=۲(۱۵)-(-۹)=۳۹$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} |A| & ۸ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد در این صورت حاصل $|A|$ را بیابید.

$$|A|=۵|A|-۲۴\to ۴|A|=۲۴\to |A|=۶$$

مثال: اگر $A=[2i-3j]_{3\times 2}$ و $B_{2\times 3}=\begin{cases}-1 & i\neq j\\ 0 & i=j\end{cases}$ باشد دترمینان ماتریس AB را به دست آورید.

ابتدا ماتریس‌های A و B را تشکیل می‌دهیم:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 5\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & -3 & -3\end{bmatrix}$$

حال با بسط برحسب سطر اول داریم:

$$|AB|=4\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -3 & -3\end{vmatrix}-(1)\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & -3\end{vmatrix}=4(6)-1(-6)+5(-6)=0$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ باشد دترمینان ماتریس BA را به دست آورید.

$$BA=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & 17 & 8\end{bmatrix}$$

با بسط برحسب سطر اول، داریم:

$$|BA|=3\begin{vmatrix}3 & 2\\ 17 & 8\end{vmatrix}-(1)\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 8\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 17\end{vmatrix}=3(-10)-1(-10)-1(-20)=0$$

مثال: دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}2 & m-2\\ n+1 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ m & 0 & n\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$ مفروضند. اگر A یک ماتریس قطری باشد حاصل $|A|+|B|$ را به دست آورید.

می‌دانیم که ماتریس A، یک ماتریس قطری است، پس:

$$\begin{cases}m-2=0\to m=2\\ n+1=0\to n=-1\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\to |A|=2$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{بسط برحسب سطر اول}}|B|=2(-1)-1(7)+1(-2)=-11$$

در نتیجه: $|A|+|B|=2-11=-9$

نکته: ۱) دترمینان هر ماتریس قطری، بالامثلثی و پایین‌مثلثی با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی، برابر است.

$$\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & x & y\\ 0 & b & z\\ 0 & 0 & c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ x & b & 0\\ y & z & c\end{vmatrix}=abc$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ باشد مقدار $|A|$ برابر است با:

$$|A|=2\times(-3)\times 5=-30$$

۲) اگر دو ماتریس مربعی با هم برابر باشند، دترمینان آن‌ها هم با هم برابر است.

$$A=B\to |A|=|B|$$

۳) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، داریم:

$$|AB| = |BA| = |A||B|$$

۴) اگر A ماتریسی مربعی باشد، داریم:

$$\left|A^m\right| = |A|^m$$

۵) اگر A یک ماتریس $n \times n$ و k عددی حقیقی باشد، داریم:

$$|kA| = k^n |A|$$

۶) اگر $A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & a \\ \cdot & b & \cdot \\ c & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ باشد آن‌گاه: $|A| = -abc$

۷) اگر A ماتریسی مربعی و وارون‌پذیر باشد، داریم:

$$\left|A^{-۱}\right| = \frac{۱}{|A|}$$

مثال: اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A| = ۵$ باشد آن‌گاه حاصل $|۲A|$ را به دست آورید:

می‌دانیم A ماتریسی ۳×۳ است پس:

$$|۲A| = (۲)^۳ |A| = ۸ \times ۵ = ۴۰$$

مثال: اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A| = ۵$، در این صورت حاصل $\left|\,|A|A\,\right|$ را بیابید:

$$|A| = ۵ \to \left|\underbrace{|A|}_{۵} A\right| = |۵A| = (۵)^۳ |A| = ۱۲۵ \times ۵ = ۶۲۵$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & \cdot & \cdot \\ \cdot & -۳ & \cdot \\ ۱ & \cdot & -۵ \end{bmatrix}$ در این صورت $\left|A^۲\right|$ را به دست آورید:

می‌دانیم که برای محاسبه $\left|A^۲\right|$، می‌توان حاصل $|A|^۲$ را به دست آورد. از طرفی چون A ماتریس پایین‌مثلثی است، پس:

$$|A| = (-۲) \times (-۳) \times (-۵) = -۳۰ \to |A|^۲ = (-۳۰)^۲ = ۹۰۰$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & \cdot & f \\ \cdot & a & \cdot \\ e & c & b \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد دترمینان ماتریس A را بیابید.

چون A ماتریسی اسکالر است پس:

$$\begin{cases} f = e = c = \cdot \\ a = b = ۲ \end{cases}$$

و دترمینان ماتریس A با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی برابر است، یعنی:

$$|A| = ۲ \times a \times b = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ \cdot & ۲ & ۳ \\ \cdot & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد حاصل $\left|A^۳\right|$ را محاسبه کنید.

ابتدا دترمینان ماتریس A را با بسط برحسب ستون اول به دست می‌آوریم (چرا ستون اول؟ چون صفر زیاد داره خب!)

$$|A| = ۲\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} \underbrace{-(\cdot)\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} + (\cdot)\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}}_{\text{می‌تونستی اینارو هم ننویسی}} = ۲(۴-۳) - \cdot + \cdot = ۲$$

حال برای محاسبه $\left|A^۳\right|$ داریم:

$$\left|A^۳\right| = |A|^۳ = (۲)^۳ = ۸$$

مثال: اگر $۲A=\begin{bmatrix} |A| & -۴ \\ ۱ & |A| \end{bmatrix}$ باشد در این صورت حاصل $|A^{-۱}|$ را بیابید.

ابتدا دترمینان ماتریس $۲A$ را پیدا می‌کنیم:

$$|۲A|=(|A|^۲+۴)\xrightarrow[|۲A|=(۲)^۲|A|]{\text{ماتریسی } ۲\times۲ \; A}|A|^۲-۴|A|+۴=۰\rightarrow(|A|-۲)^۲=۰\rightarrow|A|=۲$$

حال حاصل $|A^{-۱}|$ برابر است با:

$$|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}=\frac{۱}{۲}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد حاصل $||A|A|$ را بیابید.

$$|A|=-(۱\times۲\times(-۱))=۲$$

$$||A|A|=|A|^۳|A|=|A|^۴=۲^۴=۱۶$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $|A|+|B^۲|$ را بیابید.

$$|A|=۲\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix}=۲\times۱۰=۲۰$$

$$|B|=-۶\rightarrow|B^۲|=۳۶$$

$$|A|+|B^۲|=۵۶$$

۵ ۰/۵

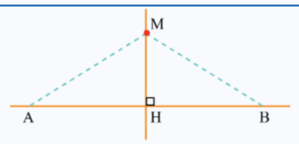
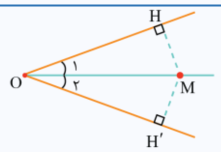
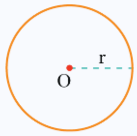
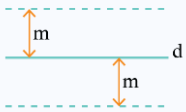
مصحح شو!

الف) دو خط موازی خط d در دو طرف آن (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵)

مکان هندسی:

به مجموعه نقاط از صفحه یا فضا که همه آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد، مکان هندسی می‌گوییم.

مکان هندسی‌های مهم:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشند، عمودمنصف آن پاره‌خط است.	
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشند، نیمساز آن زاویه است.	
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت مانند O به فاصلهٔ ثابت r قرار داشته باشند، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع r است.	
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت m قرار داشته باشند، دو خط راست موازی با خط d هستند که به فاصله m در دو طرف آن قرار گرفته‌اند.	

مثال: مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید.

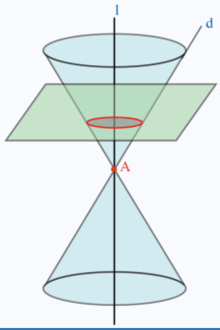
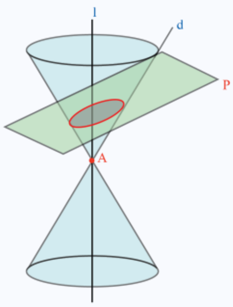
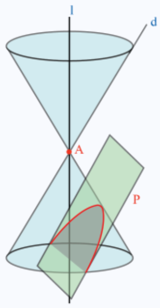
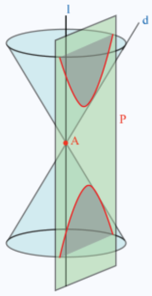
الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند. (نیمساز زوایای بین دو خط d و d')

ب) مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس‌اند. (خطی عمود بر d در نقطه A)

پ) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند. (دو خط موازی با d و به فاصله r از آن)

ت) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(o,r)$ در صفحه این دایره مماس خارجی‌اند. (دایره‌ای به مرکز o و شعاع $2r$)

مقاطع مخروطی:

دایره	بیضی	سهمی	هذلولی
صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند.	صفحه P بر محور L عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند.	صفحه P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند.	صفحه P هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور L نباشد.
			
حالت‌های دیگر			
اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی تنها شامل یک نقطه است.	اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی تنها شامل یک نقطه است.	اگر صفحه P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور کند فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک خط است.	اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند و هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی دو خط متقاطع است.

۶

مصحح شو!

$$r=\frac{|۴\times(-۲)+۳\times۱-۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲ \quad (۰/۵)$$

$$(x+۲)^۲+(y-۱)^۲=۴ \quad (۰/۵)$$

۱

هر آنچه باید در مورد دایره بدانیم:

اگر $O(\alpha,\beta)$ مختصات مرکز یک دایره و r شعاع آن دایره باشد معادله استاندارد دایره برابر است با:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$$

مثال: اگر معادله دایره به صورت $(x+۱)^۲+y^۲=۴$ باشد مطلوبست:

الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره:

$$(x+۱)^۲+(y-۰)^۲=(۲)^۲ \rightarrow \begin{cases}\alpha=-۱\\ \beta=۰ \quad \rightarrow O(-۱,۰)\\ r=۲\end{cases}$$

ب) مختصات تقاطع دایره با محور x ها و محور y ها:

برای پیدا کردن مختصات تقاطع دایره با محور x ها، باید در معادله دایره، $y=۰$ قرار دهیم که در این صورت:

$$(x+۱)^۲+y^۲=۴ \xrightarrow{y=۰} (x+۱)^۲=۴ \rightarrow \begin{cases}x+۱=۲\rightarrow x=۱\\ x+۱=-۲\rightarrow x=-۳\end{cases}$$

در نتیجه نقاط $(-۳,۰)$ و $(۱,۰)$ محل تقاطع دایره با محور x ها هستند.

و برای پیدا کردن مختصات تقاطع دایره با محور y ها، باید در معادله دایره، $x=0$ را قرار دهیم:

$$(x+1)^2+y^2=4 \xrightarrow{x=0} 1+y^2=4 \to y^2=3 \to \begin{cases} y=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$$

پس نقاط $(0,\sqrt{3})$ و $(0,-\sqrt{3})$، محل تقاطع دایره با محور y ها هستند.

نکته: اگر $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله گسترده (ضمنی) یک دایره باشد، داریم:

$O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$: مختصات مرکز دایره

$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$: شعاع دایره

مثال: معادله گسترده دایره‌ای به صورت $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ می‌باشد. مرکز و شعاع دایره را بنویسید.

$$O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}) \to O(-\frac{-6}{2},-\frac{2}{2}) \to O(3,-1)$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} \to r=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(2)^2-4(6)}=\frac{1}{2}\sqrt{36+4-24}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2$$

در مثال فوق، معادله دایره را به صورت استاندارد بنویسید:

$$\begin{cases} O(3,-1) \\ r=2 \end{cases} \to (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \to (x-3)^2+(y-(-1))^2=4 \to (x-3)^2+(y+1)^2=4$$

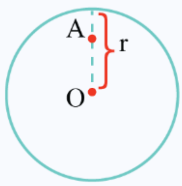
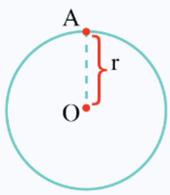
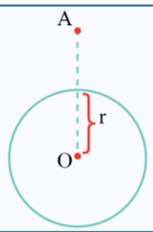
نکته: شرط دایره بودن یک رابطه ضمنی به فرم $x^2+y^2+ax+by+c=0$

- اگر $a^2+b^2>4c$ باشد، این رابطه مربوط به دایره‌ای به شعاع $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ و به مرکز $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ است.
- اگر $a^2+b^2=4c$ باشد، این رابطه مربوط به یک نقطه به مختصات $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ است.
- اگر $a^2+b^2<4c$ باشد، این رابطه هیچ نقطه‌ای را در صفحه مشخص نمی‌کند.

مثال: حدود a را طوری به دست آورید که $x^2+y^2-4x+6y+a=0$ معادله یک دایره باشد.

$$a^2+b^2>4c \to 16+36>4a \to a<13$$

وضعیت نقطه با دایره: برای مشخص کردن وضعیت نقطه‌ای مانند A با دایره، ابتدا فاصله مرکز دایره را از نقطه A پیدا می‌کنیم و سپس به کمک جدول زیر وضعیت آن را با دایره تعیین می‌کنیم:

		
نقطه A درون دایره است.	نقطه A روی دایره است.	نقطه A بیرون دایره است.
$OA<r$	$OA=r$	$OA>r$

یادآوری: فاصله دو نقطه $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ از هم برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(2,3)$ بوده و $M(1,1)$ یک نقطه از آن باشد.

فاصله OM، همان شعاع دایره است، پس:

$$R=OM=\sqrt{(1-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=5$$

مثال: وضعیت نقطه $A(۱,-۲)$ نسبت به دایره $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ را تعیین کنید.

مرکز و شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} O(۱,-۱) \\ r=\sqrt{۲} \end{cases}$$

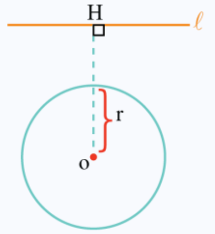
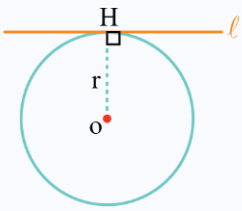
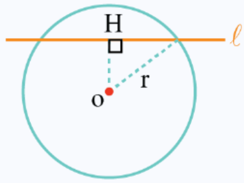
حال فاصله نقطه A را از مرکز دایره به‌دست می‌آوریم:

$$OA=\sqrt{(۱-۱)^۲+(-۱+۲)^۲}=۱$$

چون $OA<r$ است پس نقطه درون دایره قرار دارد.

اوضاع نسبی خط و دایره: برای مشخص کردن وضعیت یک خط نسبت به یک دایره قبل از هر چیز، ابتدا فاصله مرکز دایره از خط موردنظر را پیدا می‌کنیم (OH).

حال با توجه به اندازه OH و اندازه شعاع دایره، داریم:

		
خط ℓ دایره را قطع نمی‌کند.	خط ℓ بر دایره مماس است.	خط ℓ با دایره متقاطع است.
$OH>r$	$OH=r$	$OH<r$

یادآوری:

- خط مماس بر دایره، در نقطه تماس، بر شعاع دایره عمود است.
- فاصله نقطه $A(x_۰,y_۰)$ از خط به معادله $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

مثال: وضعیت خط $x+y=۱$ را نسبت به دایره $x^۲+y^۲+۲x+۲y-۱=۰$ مشخص نمایید.

ابتدا مختصات مرکز دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})\to O(-\frac{۲}{۲},-\frac{۲}{۲})\to O(-۱,-۱)$$

حال فاصله مرکز دایره را از خط به معادله $x+y-۱=۰$ به‌دست می‌آوریم:

$$OH=\frac{|(۱\times -۱)+(۱\times -۱)-۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{|-۳|}{\sqrt{۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}\to OH=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\approx ۲/۱$$

شعاع دایره را به دست آورده و آن را با اندازه OH مقایسه می‌کنیم:

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴-(-۴)}=\frac{\sqrt{۱۲}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}\approx ۱/۷$$

چون $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}>\sqrt{۳}$ است پس $OH>r$ است در نتیجه خط $x+y=۱$ دایره را قطع نمی‌کند.

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۱,-۱)$ و بر خط $۳x-۴y+۳=۰$ مماس باشد.

فاصله مرکز دایره تا خط داده شده برابر شعاع دایره است:

$$d=\frac{|۳(۱)-۴(-۱)+۳|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

$$\begin{cases} O(۱,-۱) \\ r=۲ \end{cases}\to (x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۴$$

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=-۵$ بر آن مماس باشد.

محل تقاطع خطوط داده شده، همان مرکز دایره است:

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \to \begin{cases} x=۲ \\ y=-۱ \end{cases} \to O(۲,-۱)$$

از طرفی فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره با شعاع دایره برابر است:

$$r=\frac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

در نتیجه معادله دایره برابر است با:

$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$$

۷ | ۱/۷۵

مصحح شو!

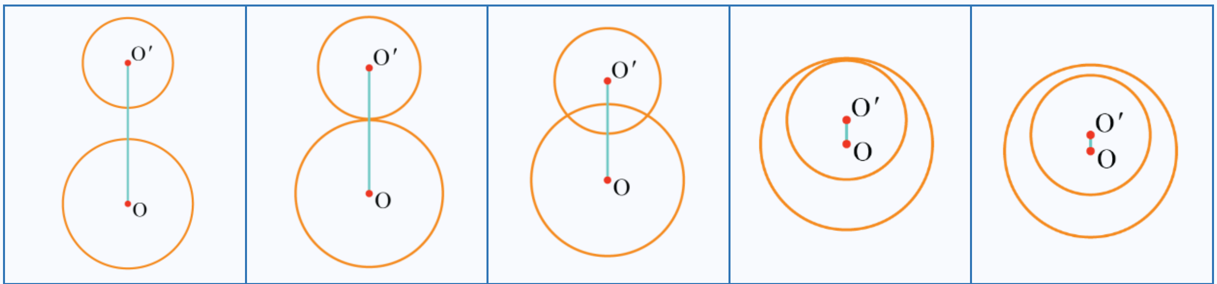
$$\overbrace{O_۱(۴,۱)}^{(۰/۲۵)},\ \overbrace{r_۱=۱}^{(۰/۲۵)} \quad \text{و} \quad \overbrace{O_۲(۴,-۲)}^{(۰/۲۵)},\ \overbrace{r_۲=۳}^{(۰/۲۵)}$$

$$O_۱O_۲=۳\ (۰/۲۵) \Rightarrow |r_۲-r_۱|<O_۱O_۲<r_۲+r_۱ \quad (۰/۲۵)$$

بنابراین دو دایره متقاطع هستند. (۰/۲۵)

اوضاع نسبی دو دایره:

اوضاع نسبی دو دایره: دو دایره $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ را در نظر بگیرید؛ اگر اندازه پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند (خط‌المرکزین) برابر d باشد، داریم:



$d>r+r'$	$d=r+r'$	$\|r-r'\|<d<r+r'$	$d=\|r-r'\|$	$d<\|r-r'\|$
دو دایره بیرون هم (متخارج)	دو دایره مماس بیرون	دو دایره متقاطع	دو دایره مماس درون	دو دایره متداخل

- توجه شود که اگر $d=۰$ باشد دو دایره هم‌مرکز خواهند بود.
- برای تشخیص وضعیت دو دایره $C(O,r)$ و $C'(O',r')$؛ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) ابتدا مختصات مرکز و اندازه شعاع هر دو دایره را به‌دست می‌آوریم.

۲) سپس طول خط‌المرکزین دو دایره $d=|OO'|$ را نیز به‌دست می‌آوریم.

۳) در نهایت $(r+r')$ و $|r-r'|$ را نیز محاسبه کرده و آن‌ها را با اندازه $d=|OO'|$ مقایسه می‌کنیم.

مثال: وضعیت دو دایره $(x-۱)^۲+y^۲=۱$ و $x^۲+(y-۱)^۲=۱$ را نسبت به هم مشخص کنید.

ابتدا مرکز و شعاع هر دو دایره را مشخص می‌کنیم:

$$(x-۱)^۲+y^۲=۱ \to \begin{cases} O(۱,۰) \\ r=۱ \end{cases}$$

$$x^۲+(y-۱)^۲=۱ \to \begin{cases} O'(۰,۱) \\ r'=۱ \end{cases}$$

حال فاصله دو مرکز را به دست آورده و آن را با $r+r'$ و $|r-r'|$ مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} |OO'| = \sqrt{2} \\ r+r' = 2 \\ |r-r'| = 0 \end{cases} \rightarrow |r-r'| < OO' < r+r' \rightarrow$$ دو دایره متقاطع‌اند.

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ باشد و با دایره به معادله $x^2+y^2-8x+4y+16=0$ مماس داخل باشد.

ابتدا مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره $x^2+y^2-8x+4y+16=0$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} O'(4,-2) \\ r' = 2 \end{cases}$$

حال فاصله مرکز دو دایره را نیز به‌دست می‌آوریم:

$$OO' = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

می‌دانیم که دو دایره مماس داخل هستند، پس: $|r-r'| = OO'$

$$|r-2| = 5 \rightarrow \begin{cases} r-2 = 5 \rightarrow r = 7 \\ r-2 = -5 \rightarrow r = -3 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین معادله دایره موردنظر برابر است با:

$$\begin{cases} O(0,1) \\ r = 7 \end{cases} \rightarrow (x-0)^2+(y-1)^2 = 49 \rightarrow x^2+(y-1)^2 = 49$$

۸ — ۱

مصحح شو!

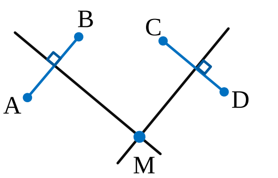
مکان هندسی نقاطی که از نقاط A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. (۰/۲۵)

مکان هندسی نقاطی که از نقاط C و D به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط CD است. (۰/۲۵)

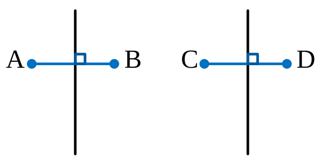
محل برخورد دو عمودمنصف، جواب مسئله است. (۰/۲۵)

حالت‌های ممکن: یک جواب، بدون جواب، بی‌شمارجواب (۰/۲۵)

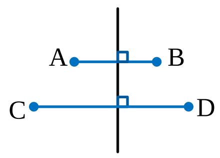
راهنمای مصحح: اگر دانش‌آموزی با رسم شکل، جواب‌ها را مشخص کرده باشد، نمره کامل تعلق می‌گیرد.



«یک جواب»



«بدون جواب»

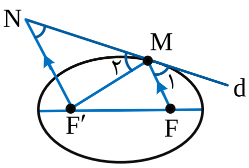


«بی‌شمار جواب»

۹ — ۱

مصحح شو!

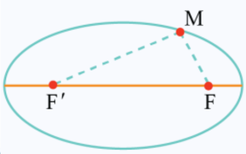
بنا به ویژگی بازتابندگی در بیضی $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ می‌باشد، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \ (0/25) \\ \underbrace{MF \parallel NF' \ , \text{مورب } MN \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{N}}_{(0/25)} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\hat{N} = \hat{M}_2}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{NF' = MF'}_{(0/25)}$$

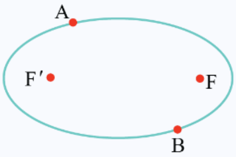
حالا دیگه رسیدیم به بیضی و ویژگی‌های آن:

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله آن‌ها از دو نقطه ثابت F و F' (F و F' کانون‌های بیضی هستند)، مقدار ثابتی است که این مقدار ثابت برابر $2a$ است.

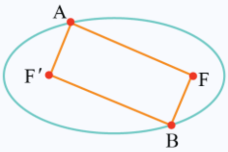


$$MF + MF' = 2a$$

مثال: دو نقطه A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند. اگر $AF' = BF$ باشد ثابت کنید که دو پاره‌خط AF و BF' موازی‌اند.



پاسخ: نقاط A و B را به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم:

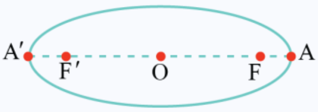


نقطه A و B روی بیضی قرار دارند پس بنابه تعریف بیضی:

$$\begin{cases} AF + AF' = ۲a \\ BF + BF' = ۲a \end{cases} \xrightarrow[\text{فرض مسئله}]{AF'=BF} AF = BF'$$

بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ متوازی‌الاضلاع است و می‌دانیم که در هر متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند، پس: $AF \parallel BF'$

مثال: در بیضی روبه‌رو نقاط A و A' دو سر قطر بزرگ و نقاط F و F' کانون‌های بیضی هستند، ثابت کنید $A'F' = AF$



حل: نقطه A و A' روی بیضی قرار دارند و بنابه تعریف بیضی داریم:

$$\begin{cases} A'F' + A'F = ۲a \\ AF' + AF = ۲a \end{cases}$$

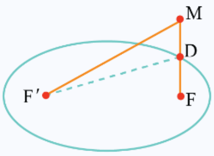
$$\to A'F' + A'F = AF' + AF \to A'F' + (A'F' + FF') = AF + (AF + FF') \to AF = A'F'$$

مثال: اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد ثابت کنید که مجموع فواصل نقطه M از کانون‌های F و F' بزرگ‌تر از طول قطر بزرگ بیضی است.

پاسخ: از نقطه M به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم تا بیضی را در نقطه D قطع کند، نقطه D روی بیضی قرار دارد و بنابه تعریف بیضی، داریم:

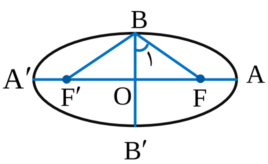
$$DF + DF' = ۲a$$

حال بنابر نامساوی مثلثی در مثلث MDF' داریم:

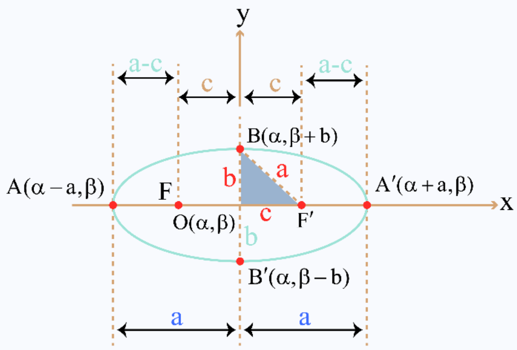


$$MD + MF' > DF' \xrightarrow{+DF} \underbrace{DF + MD}_{MF} + MF' > \underbrace{DF + DF'}_{۲a} \to MF + MF' > ۲a$$

نکته: اگر بدنه داخلی یک بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کانون دیگر بیضی عبور می‌کند.

۱۰	مصحح شو!  $a = ۲b \Rightarrow c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۴b^۲ - b^۲ = ۳b^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۳}b \ (۰/۲۵)$ $\tan \hat{B}_۱ = \frac{OF}{OB} = \frac{\sqrt{۳}b}{b} = \sqrt{۳} \ (۰/۲۵) \Rightarrow \hat{B}_۱ = ۶۰^\circ \ (۰/۲۵)$ $F\hat{B}F' = ۲ \times ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ \ (۰/۲۵)$	۱

نکات بیشتر بیضی:



- $\begin{cases} AA' = ۲a = \text{قطر بزرگ (قطر کانونی)} \\ BB' = ۲b = \text{قطر کوچک} \\ FF' = ۲c = \text{فاصله کانونی} \end{cases}$
- $\begin{cases} OA = OA' = a \\ OB = OB' = b \\ OF = OF' = c \end{cases}$
- $BF' = BF = B'F = B'F' = a$
- $a^۲ = b^۲ + c^۲$ (با توجه به مثلث قائم‌الزاویه OBF')
- فاصله یک کانون تا دورترین رأس $= a + c$
- فاصله یک کانون تا نزدیک‌ترین رأس $= a - c$

• خروج از مرکز بیضی:

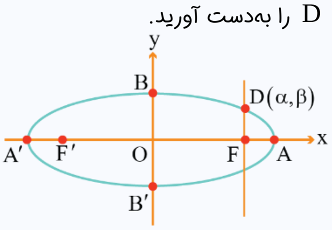
۱) مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهیم.

۲) همواره خروج از مرکز بیضی بین ۰ و ۱ است. $(۰ \le e \le ۱)$

۳) هرچه نسبت $e = \frac{c}{a}$ بزرگ‌تر و به ۱ نزدیک‌تر باشد شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و به عبارتی شکل بیضی به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود.

۴) هرچه نسبت $e = \frac{c}{a}$ کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد شکل بیضی به شکل دایره نزدیک‌تر خواهد بود.

مثال: مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله F از هر دو نقطه O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطه F بر AA' عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطه D قطع کرده باشد مختصات نقطه D را به‌دست آورید.



پاسخ: می‌دانیم $FO = FA = ۴$ است. پس مختصات نقطه F به صورت $F(۴,۰)$ است و چون نقاط F و D طول برابری دارند پس مختصات نقطه D به صورت $D(۴,\beta)$ است.

از طرفی نقطه D روی بیضی است، پس:

$$DF + DF' = ۲a \qquad (۱)$$

$$OA = a \to OF + FA = a \to ۴ + ۴ = a \to a = ۸ \xrightarrow{(۱)} DF + DF' = ۱۶$$

به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث DFF' داریم:

$$\begin{cases} DF'^۲ = FF'^۲ + DF^۲ \\ DF + DF' = ۱۶ \to DF' = ۱۶ - DF \end{cases} \to (۱۶ - DF)^۲ = FF'^۲ + DF^۲$$

می‌دانیم $OF' = OF = ۴$ است، پس: $FF' = ۸$ در نتیجه:

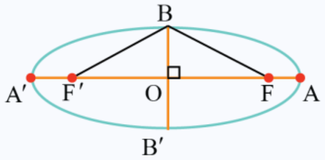
$$(۱۶ - DF)^۲ = ۶۴ + DF^۲ \to ۲۵۶ - ۳۲DF + DF^۲ = ۶۴ + DF^۲ \to ۳۲DF = ۱۹۲$$

$$\to DF = ۶ \to \beta = ۶$$

پس مختصات نقطه D برابر است با:

$$D(۴,۶)$$

مثال: در شکل مقابل، اگر $OA=a$ ، $OB=b$ و $OF=c$ باشد ثابت کنید: $a^2=b^2+c^2$



پاسخ: نقطه B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' قرار دارد در نتیجه: $BF=BF'$ (۱)

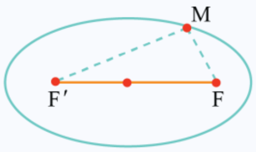
از طرف فاصله هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

$$BF+BF'=2a\xrightarrow{(1)}BF=BF'=a$$

حال بنابه رابطه فیثاغورس در مثلث BOF داریم:

$$OF^2+OB^2=BF^2\to c^2+b^2=a^2$$

مثال: نقطه M روی بیضی به اقطار ۱۰ و ۶ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.



الف) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ب) طول MF را بیابید. (F و F' کانون‌های بیضی و $MF<MF'$)

پاسخ: الف)

$$\begin{cases}2a=10\to a=5\\2b=6\to b=3\end{cases}\to a^2=b^2+c^2\to c=4$$

در مثلث MFF' ، میانه وارد بر یک ضلع نصف ضلع روبه‌رو است $(MO=\frac{1}{2}FF'=4)$ در نتیجه مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ب)

$$MF+MF'=2a=10\to MF'=10-MF$$

$$MF^2+MF'^2=FF'^2\to MF^2+(10-MF)^2=8^2\to MF=5-\sqrt{7}$$

مثال: اگر در یک بیضی طول AA' (قطر بزرگ) برابر با ۱۶ و خروج از مرکز آن $\frac{3}{4}$ باشد، فاصله رأس A تا نزدیک‌ترین کانون را به‌دست آورید.

$$\frac{c}{a}=\frac{3}{4}\xrightarrow{a=8}c=6$$

فاصله رأس A تا نزدیک‌ترین کانون : $AF=a-c=2$

مثال: در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات، طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است.

الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید:

$$\begin{cases}2a=10\to a=5\\2b=6\to b=3\end{cases}\to a^2=b^2+c^2\to c=4\to e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$$

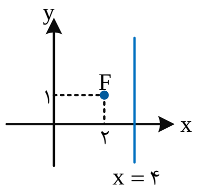
ب) مختصات کانون‌ها (F',F) ، مختصات دو سر قطر بزرگ (A',A) و دو سر قطر کوچک (B',B) را به‌دست آورید.

$$\begin{cases}F(4,0)\\F'(-4,0)\end{cases}\qquad\begin{cases}A(5,0)\\A'(-5,0)\end{cases}\qquad\begin{cases}B(0,3)\\B'(0,-3)\end{cases}$$

۱۱

مصحح شو!

با توجه به جایگاه کانون و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ می‌باشد. (۰/۲۵)

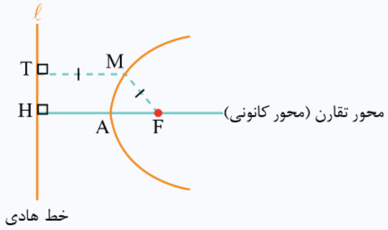


$$\begin{cases}\text{رأس سهمی}: A(3,1)\ (0/25)\\a=AF=1\ (0/25)\end{cases}\Rightarrow(y-k)^2=-4a(x-h)\Rightarrow\underbrace{(y-1)^2=-4(x-3)}_{(0/25)}$$

۱

سهمی:

سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.



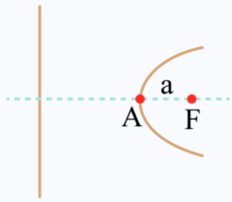
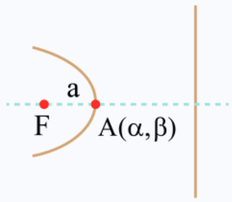
$$\begin{cases} F = \text{کانون سهمی} \\ A = \text{رأس سهمی} \\ AF = \text{فاصله کانونی} = a\ ,\ (a > 0) \end{cases}$$

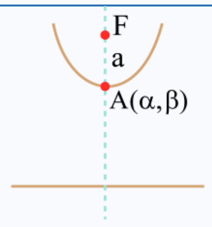
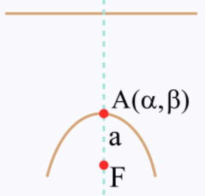
طبق تعریف سهمی، داریم: $MT = MF$

- فاصله کانون سهمی از خط هادی برابر است با: $FH = 2a$
- فاصله رأس سهمی از کانون، با فاصله رأس سهمی تا خط هادی، برابر است. $AH = AF = a$

معادله استاندارد (متعارف) سهمی

در یک سهمی، اگر نقطه $A(\alpha,\beta)$ رأس سهمی و فاصله رأس سهمی تا کانون سهمی برابر a باشد، داریم: $(a > 0)$

	سهمی افقی	
	رو به راست	رو به چپ
		
معادله سهمی	$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$	$(y-\beta)^2 = -4a(x-\alpha)$
معادله خط هادی	$x = \alpha - a$	$x = \alpha + a$
مختصات کانون	$F(\alpha + a, \beta)$	$F(\alpha - a, \beta)$

	سهمی قائم	
	رو به بالا	رو به پایین
		
معادله سهمی	$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$	$(x-\alpha)^2 = -4a(y-\beta)$
معادله خط هادی	$y = \beta - a$	$y = \beta + a$
مختصات کانون	$F(\alpha, \beta + a)$	$F(\alpha, \beta - a)$

توجه: در معادله سهمی افقی، y^2 وجود دارد ولی در معادله سهمی قائم، x^2 وجود دارد.

استاندارد کردن معادله گسترده سهمی:

اگر معادله سهمی به صورت $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$ یا $Ay^2 + By + Cx + D = 0$ باشد برای استاندارد کردن این معادلات، داریم:

- ابتدا با تقسیم کردن دو طرف معادله بر A، ضریب x^2 یا y^2 را از بین می‌بریم.
- عدد ثابت را به همراه متغیر غیرهم‌جنس به طرف دیگر معادله منتقل کرده و معادله را به صورت $x^2 + ax = -by - c$ یا $y^2 + ay = -bx - c$ تبدیل می‌کنیم.
- طرف اول معادله را به صورت مربع کامل نوشته و عدد $\frac{a^2}{4}$ را به طرف دیگر تساوی اضافه می‌کنیم.
- از ضریب متغیر درجه یک در طرف دوم تساوی فاکتور می‌گیریم.

مثال: معادله یک سهمی به صورت $y^۲-۶y+۱۶x+۲۵=۰$ داده شده است آن را به یکی از حالت‌های متعارف تبدیل کنید.

$$y^۲-۶y=-۱۶x-۲۵$$
$$y^۲-۶y+۹=-۱۶x-۲۵+۹\rightarrow(y-۳)^۲=-۱۶x-۱۶$$
$$\rightarrow(y-۳)^۲=-۱۶(x+۱)$$

مثال: معادله سهمی را بنویسید که $A(۱,۲)$ رأس و $F(۱,-۲)$ کانون آن باشد و سپس معادله خط هادی آن را بیابید.

با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات، سهمی رو به پایین بوده و $a=۴$ است. در نتیجه:

معادله سهمی : $(x-۱)^۲=-۱۶(y-۲)$

معادله خط هادی : $y=۶$

مثال: معادله سهمی را بنویسید که $A(۲,۳)$ رأس آن بوده و معادله خط هادی آن $x=۳$ باشد.

با توجه به جایگاه رأس سهمی و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ است.

در این سهمی $a=۱$ بوده و معادله آن برابر است با:

$$(y-۳)^۲=-۴(x-۲)$$

- در این سؤال، مختصات کانون سهمی را به‌دست آورید:

$$F=(\alpha-a,\beta)=(۲-۱,۳)=(۱,۳)$$

- در این سؤال، مختصات محل برخورد سهمی با محور طول‌ها را حساب کنید.

$$(y-۳)^۲=-۴(x-۲)\xrightarrow{y=۰}x=-\frac{۱}{۴}\rightarrow \text{محل برخورد با محور طول‌ها}=(-\frac{۱}{۴},۰)$$

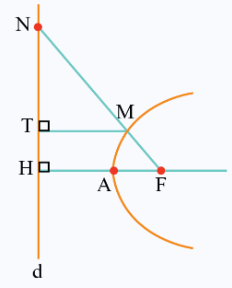
مثال: سهمی $y^۲=۴x-۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، معادله دایره را بنویسید و سپس مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

$$y^۲=۴(x-۱)\rightarrow\begin{cases}A(۱,۰)\\a=۱\\F(۲,۰)\end{cases}$$

$$(x-۲)^۲+y^۲=۹\rightarrow\begin{cases}y^۲=۴x-۴\\y^۲=-x^۲+۴x+۵\end{cases}\rightarrow x=\pm۳\xrightarrow{x\geq۱}x=۳$$

مختصات نقاط برخورد : $\begin{cases}M(۳,۲\sqrt{۲})\\M'(۳,-۲\sqrt{۲})\end{cases}$

مثال: در شکل روبه‌رو سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از کانون F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطه M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید $\frac{FN}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$



روش اول: بنابه تعریف سهمی $MF=MT$ است پس مثلث MFT متساوی‌الساقین است:

$$(۱)\qquad M\hat{T}F=T\hat{F}M$$

از طرفی بنابه خطوط موازی $FH\parallel MT$ و مورب FT نتیجه می‌شود:

$$(۲)\qquad M\hat{T}F=T\hat{F}H$$

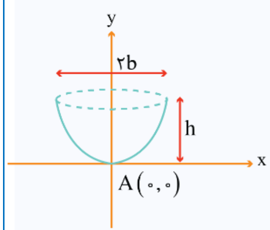
از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که TF نیمساز است، حال بنابه قضیه نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH}=\frac{NT}{TH}\xrightarrow{FH=۲FA}\frac{NF}{۲FA}=\frac{NT}{TH}\xrightarrow{\times۲}\frac{NF}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$$

روش دوم: می‌دانیم $FH \parallel MT$ است لذا با توجه به قضیه تالس در مثلث NHF ، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{NM}{MF}=\dfrac{NT}{TH}\\[2mm] \dfrac{MT}{FH}=\dfrac{NM}{NF}\xrightarrow{MT=MF}\dfrac{NF}{FH}=\dfrac{NM}{MF}\end{array}\right\}\xrightarrow{FH=۲FA}\dfrac{NF}{۲FA}=\dfrac{NT}{TH}\xrightarrow{\times ۲}\dfrac{NF}{FA}=\dfrac{۲NT}{TH}$$

نکته: اگر قطر دهانه یک دیش مخابراتی برابر $۲b$ و عمق (گودی) آن برابر h باشد فاصله کانونی آن برابر است با:



$$\text{فاصله کانونی}=\frac{b^۲}{۴h}$$

مثال: در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است فاصله کانونی این دیش را به‌دست آورید.

$$a=\frac{b^۲}{۴h}\ ,\ \begin{cases}۲b=۶۰\to b=۳۰\\ h=۹\end{cases}$$

$$a=\frac{(۳۰)^۲}{۴\times۹}=۲۵$$

---

۱۲ — ۰/۷۵

مصحح شو!

$$۲x^۲-۴x+۳y=۴\xrightarrow{\div ۲}x^۲-۲x+\frac{۳}{۲}y=۲$$

$$\Rightarrow x^۲-۲x+۱=-\frac{۳}{۲}y+۲+۱\Rightarrow (x-۱)^۲=-\frac{۳}{۲}(y-۲)\quad (۰/۲۵)$$

$$\begin{cases}\text{رأس سهمی}: A(h,k)\Rightarrow A(۱,۲)\\ -۴a=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=\frac{۳}{۸}\end{cases}$$

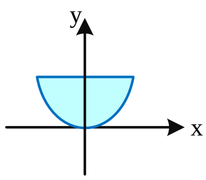
$$\text{کانون}: F(h,-a+k)\Rightarrow F(۱,-\frac{۳}{۸}+۲)=(۱,\frac{۱۳}{۸})\quad (۰/۲۵)$$

$$\text{خط هادی}: y=a+k=\frac{۳}{۸}+۲=\frac{۱۹}{۸}\quad (۰/۲۵)$$

---

۱۳ — ۰/۵

مصحح شو!



(رسم نمودار، ۰/۵ نمره)

---

۱۴ — ۱

مصحح شو!

الف) ۱ (۰/۲۵)　　ب) نادرست (۰/۲۵)　　پ) $(۳,۰,۰)(۰/۲۵)$　　ت) $۱۲۰^\circ(۰/۲۵)$

---

۱۵ — ۱

مصحح شو!

اگر α زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، داریم:

$$\vec{a}.\vec{b}=۰\Leftrightarrow \underbrace{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha=۰}_{(۰/۲۵)}\xleftrightarrow[(۰/۲۵)]{|a|\neq۰\ ,\ |b|\neq۰}\cos\alpha=۰\quad(۰/۲۵)$$

$$\xleftrightarrow{۰\le\alpha<\pi}\underbrace{\alpha=\frac{\pi}{۲}}_{(۰/۲۵)}\Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

۲۰شو خواص بردارها:

۱) دو بردار مساوی (همسنگ): دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را مساوی (همسنگ) گوییم هرگاه هم‌اندازه و هم‌جهت باشند.

۲) طول هر برداری مانند $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ در $\mathbb{R}^۳$ برابر است با:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}$$

۳) جمع و تفاضل دو بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ برابر است با:

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_۱\pm b_۱,a_۲\pm b_۲,a_۳\pm b_۳)$$

۴) اگر $A=(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B=(x_۲,y_۲,z_۲)$ دو نقطه در فضا باشند:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=B-A=(x_۲-x_۱,y_۲-y_۱,z_۲-z_۱)\\ |AB|=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲}\end{cases}$$

۵) اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ برداری در فضا باشد، بردار قرینه آن برابر است با:

$$-\vec{a}=(-a_۱,-a_۲,-a_۳)$$

۶) برای هر عدد حقیقی r، حاصل‌ضرب r در بردار $\vec{a}$ برابر است با:

$$r\vec{a}=r(a_۱,a_۲,a_۳)=(ra_۱,ra_۲,ra_۳)$$

۷) خواص جمع بردارها:

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
- $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{o}$
- $\vec{a}+\vec{o}=\vec{o}+\vec{a}=\vec{a}$
- $r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$
- $(r+s)\vec{a}=r\vec{a}+s\vec{a}$
- $(rs)\vec{a}=r(s\vec{a})$
- $\vec{b}=r\vec{a}\rightarrow|\vec{b}|=|r||\vec{a}|$ ($|r|$، قدرمطلق r است.)

۸) بردارهای یکه محورهای مختصات:

$$\begin{cases}\vec{i}=(۱,۰,۰)\rightarrow \text{بردار یکه در جهت محور طول‌ها}\\ \vec{j}=(۰,۱,۰)\rightarrow \text{بردار یکه در جهت محور عرض‌ها}\\ \vec{k}=(۰,۰,۱)\rightarrow \text{بردار یکه در جهت محور ارتفاع‌ها}\end{cases}$$

۹) هر بردار مانند $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ را می‌توان به صورت ترکیبی از بردارهای یکه $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بیان کرد.

$$\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}+a_۳\vec{k}$$

مثال: طول بردار $\vec{a}=(۰,-۳,۴)$ را به‌دست آورید.

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=\sqrt{۰^۲+(-۳)^۲+۴^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

مثال: اگر $\vec{a}=(۱,۲,-۱)$ و $\vec{b}=(۰,۲,-۱)$ باشد طول بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$ را به‌دست آورید.

$$۲\vec{a}-\vec{b}=(۲,۲,-۱)$$

$$|۲\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{۴+۴+۱}=\sqrt{۹}=۳$$

مثال: نقاط $A(۳,۱,۲)$ و $B(۳,-۲,۲)$ در $\mathbb{R}^۳$ مفروضند.

الف) طول پاره‌خط AB را به‌دست آورید.

ب) معادلات مربوط به پاره‌خط AB را بنویسید.

حل: الف)

$$AB=\sqrt{(۳-۳)^۲+(-۲-۱)^۲+(۲-۲)^۲}=۳$$

ب)

$$\begin{cases} x=۳ \\ -۲\le y\le ۱ \\ z=۲ \end{cases}$$

مثال: اگر $\vec{a}=۳\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(۳,۱,-۱)$ و $r=۲$ باشد، بردار $r\vec{b}-\vec{a}$ را به‌دست آورید.

$\vec{a}=(۳,۲,-۱)$

$r\vec{b}-\vec{a}=۲\vec{b}-\vec{a}=(۶,۲,-۲)-(۳,۲,-۱)=(۳,۰,-۱)$

و طول بردار $۲\vec{b}-\vec{a}$ را اگر بخواهیم:

$$\left|۲\vec{b}-\vec{a}\right|=\sqrt{۹+۰+۱}=\sqrt{۱۰}$$

ضرب داخلی:

اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار در $\mathbb{R}^۳$ باشند در این صورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را با نماد $\vec{a}.\vec{b}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a}.\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$$

• چند رابطه مهم:

۱) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار و θ زاویه بین آن‌ها باشد در این صورت، داریم:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که:

- اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی و هم‌جهت باشند، داریم: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$
- اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی و غیرهم‌جهت باشند، داریم: $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$
- اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، داریم: $\vec{a}.\vec{b}=۰$

۲) نامساوی کشی‌شوارتز: $\left|\vec{a}.\vec{b}\right|\le|\vec{a}||\vec{b}|$

توجه: در اینجا منظور از $\left|\vec{a}.\vec{b}\right|$، قدرمطلق مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ است.

اثباتشو هم ببین:

$$\left|\vec{a}.\vec{b}\right|=\left||\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\right|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|$$

می‌دانیم که $|\cos\theta|\le ۱$ است پس:

$$\left|\vec{a}.\vec{b}\right|\le|\vec{a}||\vec{b}|$$

مثال: بردارهای $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را در نظر بگیرید. زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} \vec{a}.\vec{b}=۲+۱+۰=۳ \\ |\vec{a}|=۳ \\ |\vec{b}|=\sqrt{۲} \end{cases}\to\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\to\theta=۴۵^\circ$$

مثال: مقدار m را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a}=(۲,m,-۱)$ و $\vec{b}=(m+۱,۳,۲)$ بر هم عمود باشند.

$$\vec{a}\perp\vec{b}\to\vec{a}.\vec{b}=۰\to۲(m+۱)+۳m-۲=۰\to m=۰$$

خواص ضرب داخلی:

۱) ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ خاصیت جابه‌جایی دارد. $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

۲) ضرب داخلی بردارها خاصیت توزیع‌پذیری دارد. $\vec{a}.(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}\pm\vec{a}.\vec{c}$

۳) ضرب داخلی هر بردار در خودش برابر است با: $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^۲$

۴) $\vec{a}.\vec{o}=\vec{o}.\vec{a}=۰$

	۵) امکان حذف در ضرب داخلی بردارها برقرار نیست به عبارت دیگر: $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c} \not\Rightarrow \vec{b}=\vec{c}$ ۶) برای بردارهای $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ داریم: $\begin{cases}\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=۰\\ \vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=۱\end{cases}$ ۷) اتحادها: $\lvert\vec{a}\pm\vec{b}\rvert^۲=\lvert\vec{a}\rvert^۲+\lvert\vec{b}\rvert^۲\pm ۲\vec{a}.\vec{b}$ $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=\lvert\vec{a}\rvert^۲-\lvert\vec{b}\rvert^۲$ $\lvert\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\rvert^۲=\lvert\vec{a}\rvert^۲+\lvert\vec{b}\rvert^۲+\lvert\vec{c}\rvert^۲+۲\vec{a}.\vec{b}+۲\vec{b}.\vec{c}+۲\vec{c}.\vec{a}$ **مثال:** اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به‌ترتیب با طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این ویژگی که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$ ، مقدار عددی عبارت $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ را به‌دست آورید. $\lvert\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\rvert^۲=\lvert\vec{o}\rvert^۲ \to \lvert\vec{a}\rvert^۲+\lvert\vec{b}\rvert^۲+\lvert\vec{c}\rvert^۲+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰$ $\to ۱+۴+۹+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰ \to (\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=-۷$	
۱/۵	مصحح شو! $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}=(۱,۱,۱)\ \ (۰/۲۵)$ $\underbrace{\vec{v}=۲\vec{c}-\vec{b}=(۳,-۴,۰)}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\lvert\vec{v}\rvert=۵}_{(۰/۲۵)}\ ,\ \underbrace{\vec{u}.\vec{v}=-۱}_{(۰/۲۵)}$ $\underbrace{\vec{u}'=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert^۲}\vec{v}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{\vec{u}'=(-\frac{۳}{۲۵},\frac{۴}{۲۵},۰)}_{(۰/۲۵)}$ تصویر قائم بردارها: بردار تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ به صورت زیر تعیین می‌شود: $\vec{a}'=r\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert^۲}\vec{b}$ **مثال:** تصویر قائم بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ بیابید. $\vec{a}.\vec{b}=۲\times۱+(-۱)(-۱)+۲\times۰=۳$ $\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲+۰^۲}=\sqrt{۲}$ $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert^۲}\vec{b}=\frac{۳}{۲}(۱,-۱,۰)=(\frac{۳}{۲},-\frac{۳}{۲},۰)$ **مثال:** اگر $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$ و $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$ باشند، آن‌گاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به‌دست آورید. $\vec{b}+\vec{c}=(۲,-۳,۶)$ $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})}{\lvert(\vec{b}+\vec{c})\rvert^۲}(\vec{b}+\vec{c})=\frac{۳۵}{۴۹}(۲,-۳,۶)$ **مثال:** سه بردار $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$ و $\vec{c}=(۰,۲,۱)$ را در نظر بگیرید: الف) اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با θ باشد، $\cos\theta$ را بیابید. ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b}-\vec{c}$ را به‌دست آورید.	۱۶

حل: الف)

$$\begin{cases}\vec{a}=(۲,۳,-۱)\\ \vec{b}=(۱,۰,۱)\end{cases}\to \cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{۱}{\sqrt{۱۴}\times\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۷}}$$

ب)

$$\vec{d}=\vec{b}-\vec{c}=(۱,-۲,۰)$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{d}}{|\vec{d}|^{۲}}\vec{d}=-\frac{۴}{۵}(۱,-۲,۰)$$

۱۷

مصحح شو!

$$\underbrace{\vec{u}=\vec{a}-\vec{j}=(-۲,-۱,۱)}_{(۰/۲۵)}\ ,\ \underbrace{\vec{u}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -۲ & -۱ & ۱\\ ۱ & -۲ & ۳\end{vmatrix}=-\vec{i}+۷\vec{j}+۵\vec{k}}_{(۰/۲۵)}\ ,\ \underbrace{|\vec{u}\times\vec{b}|=\sqrt{۷۵}}_{(۰/۲۵)}$$

$$S=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}\ (۰/۲۵)$$

۱

ضرب خارجی:

اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار باشند، ضرب خارجی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_۱ & a_۲ & a_۳\\ b_۱ & b_۲ & b_۳\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_۲ & a_۳\\ b_۲ & b_۳\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_۱ & a_۳\\ b_۱ & b_۳\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲\\ b_۱ & b_۲\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(a_۲b_۳-a_۳b_۲\,,a_۳b_۱-a_۱b_۳\,,a_۱b_۲-a_۲b_۱)$$

- **چند رابطه مهم:**

۱) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیرصفر و θ زاویه بین آن‌ها باشد اندازه بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ برابر است با:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که:

- اگر دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی باشند، داریم: $|\vec{a}\times\vec{b}|=۰$
- اگر دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، داریم: $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$

۲) مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود برابر است با: $|\vec{a}\times\vec{b}|$

۳) مساحت مثلثی که توسط دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود برابر است با: $\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|$

۴) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیرصفر باشند آن‌گاه رابطه مقابل (اتحاد لاگرانژ) برقرار است:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}+(\vec{a}.\vec{b})^{۲}=\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^{۲}$$

مثال: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروضند به‌طوری که $|\vec{a}|=۶$ و $|\vec{b}|=۴$ و زاویه بین آن‌ها ۳۰ درجه است مقدار عبارت $|۲\vec{a}\times\vec{b}|$ را محاسبه کنید.

$$|۲\vec{a}\times\vec{b}|=|۲\vec{a}||\vec{b}|\sin ۳۰^\circ=۲(۶)(۴)(\frac{۱}{۲})=۲۴$$

مثال: بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروضند به‌طوری که $|\vec{a}|=۳$ و $|\vec{b}|=۲۶$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=۷۲$. مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را محاسبه کنید.

روش اول:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\to ۷۲=۳\times۲۶\times\sin\theta\to\sin\theta=\frac{۱۲}{۱۳}\to\cos\theta=\pm\frac{۵}{۱۳}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۳\times۲۶\times(\pm\frac{۵}{۱۳})=\pm۳۰$$

روش دوم:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^{۲}+(\vec{a}.\vec{b})^{۲}=\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\right)^{۲}\rightarrow(۷۲)^{۲}+(\vec{a}.\vec{b})^{۲}=(۳\times۲۶)^{۲}$$

$$\rightarrow(\vec{a}.\vec{b})^{۲}=(۳\times۲۶)^{۲}-(۷۲)^{۲}=۹۰۰\rightarrow(\vec{a}.\vec{b})=\pm۳۰$$

ثابت کنید: دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=۰$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\Leftrightarrow\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{o}\right|\Leftrightarrow\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta=۰$$

می‌دانیم که $\left|\vec{a}\right|\neq۰$ و $\left|\vec{b}\right|\neq۰$ است پس:

$$\sin\theta=۰\Leftrightarrow\begin{cases}\theta=۰\\\theta=\pi\end{cases}\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$$

مثال: اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به‌ترتیب ۴ و ۶ و $\vec{a}.\vec{b}=۱۲$ باشد، مساحت مثلث بناشده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست آورید.

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{۱۲}{۴\times۶}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{۳}$$

روش اول:

$$S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{۱}{۲}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta=\frac{۱}{۲}\times۴\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

روش دوم:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^{۲}+(\vec{a}.\vec{b})^{۲}=\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\right)^{۲}\rightarrow\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^{۲}+(۱۲)^{۲}=(۴\times۶)^{۲}$$

$$\rightarrow\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=۱۲\sqrt{۳}$$

$$S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{۱۲\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

مثال: مساحت متوازی‌الاضلاعی را به‌دست آورید که توسط دو بردار $\vec{a}=(۳,۲,۱)$ و $\vec{b}=(۲,۰,۱)$ به‌وجود می‌آید.

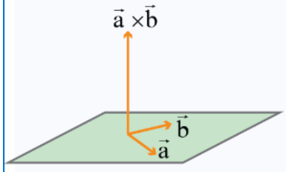
$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\۳&۲&۱\\۲&۰&۱\end{vmatrix}=۲\vec{i}-\vec{j}-۴\vec{k}=(۲,-۱,-۴)$$

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{۲^{۲}+(-۱)^{۲}+(-۴)^{۲}}=\sqrt{۲۱}$$

خواص ضرب خارجی:

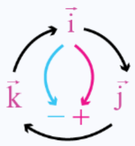
۱) ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برداری است که بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که بردار حاصل از ضرب خارجی دو بردار، بر صفحه شامل آن دو بردار نیز عمود است. به عبارت دیگر:



$$\begin{cases}\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}\rightarrow\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=۰\\\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}\rightarrow\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=۰\end{cases}$$

۲) برای بردارهای $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ داریم:

$$\begin{cases}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\end{cases}$$



$$\begin{cases}\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\\\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\\\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\end{cases}$$

۳) اگر r عددی حقیقی باشد، آن‌گاه:

$$r\vec{a}\times\vec{b}=r(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times r\vec{b}$$

۴) برای سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ داریم:

$$\begin{cases}\vec{a}\times(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}\pm\vec{a}\times\vec{c}\\(\vec{a}\pm\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})\pm(\vec{b}\times\vec{c})\end{cases}$$

۵) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$

۶) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

۷) امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار نیست به عبارت دیگر:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}\not\Rightarrow\vec{b}=\vec{c}$$

مثال: اگر $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد در $\mathbb{R}^{۳}$ باشند، حاصل $\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k})$ را به‌دست آورید.

$$\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k})=\vec{i}.(\vec{i})=|\vec{i}|^{۲}=۱$$

مثال: بردارهای $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را در نظر بگیرید. برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.

می‌دانیم که بردار $\vec{a}\times\vec{b}$، بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ (و همچنین بر صفحه شامل آن‌ها) عمود است، پس:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\۲&-۱&۲\\۱&-۱&۰\end{vmatrix}=۲\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}=(۲,۲,-۱)$$

مثال: سه بردار $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۱,۰)$ و $\vec{c}=(۲,۱,-۲)$ مفروضند. برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به‌دست آورید.

برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با: $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}$

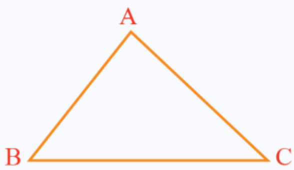
$$\vec{a}+\vec{b}=(۱,۴,۱)$$

$$\vec{c}=(۲,۱,-۲)$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\۱&۴&۱\\۲&۱&-۲\end{vmatrix}=-۹\vec{i}+۴\vec{j}-۷\vec{k}=(-۹,۴,-۷)$$

نکته: اگر مختصات سه رأس از مثلثی را در اختیار داشته باشیم برای به‌دست آوردن مساحت آن مثلث به کمک ضرب خارجی، داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\begin{cases}\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\\\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|\\\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}|\end{cases}$$



مثال: اگر $A=(-۱,۲,۰)$ و $B=(۱,۰,-۱)$ و $C=(۰,-۱,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به‌دست آورید.

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(۲,-۲,-۱)$$

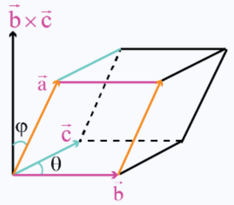
$$\overrightarrow{AC}=C-A=(۱,-۳,۱)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\۲&-۲&-۱\\۱&-۳&۱\end{vmatrix}=-۵\vec{i}-۳\vec{j}-۴\vec{k}=(-۵,-۳,-۴)$$

می‌دانیم که مساحت مثلث موردنظر از رابطه $S=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ به‌دست می‌آید، پس:

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{۲۵+۹+۱۶}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

$$S=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{۱}{۲}\times۵\sqrt{۲}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۸	مصحح شو! $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۱۲=۱۰\times۲\times\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{۳}{۵}$ (۰/۲۵) $\sin\theta=\sqrt{۱-(\frac{۳}{۵})^{۲}}=\frac{۴}{۵}$ (۰/۲۵) (θ حاده است) $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta=۲\times۱۰\times\frac{۴}{۵}=۱۶$ (۰/۲۵)	۱
۱۹	مصحح شو! $\begin{cases}\vec{b}=(-۱,۱,۰)\\\vec{c}=(۲,۱,-۲)\end{cases}\Rightarrow \vec{b}\times\vec{c}=(-۲,-۲,-۳)$ (۰/۵) $\underbrace{V=\|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\|}_{(۰/۲۵)}=\|(۲,۳,۱).(-۲,-۲,-۳)\|=۱۳$ (۰/۲۵) **حجم متوازی‌السطوح:** حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار غیرصفر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ساخته می‌شود برابر است با: $V=\|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\|$ ($\|\ \|$ علامت قدرمطلق است.)  **نکته:** اگر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه قرار داشته باشند، آن‌گاه حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده توسط این سه بردار برابر صفر است به عبارت دیگر اگر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه قرار داشته باشند آن‌گاه داریم: $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=۰$ عکس این نکته نیز درست است، یعنی اگر $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=۰$ باشد آن‌گاه سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه قرار دارند. **مثال:** مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}(۲,-۱,۳)$، $\vec{b}(۰,m,-۱)$ و $\vec{c}(۱,-۲,۳)$ در یک صفحه باشند. $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=۰\rightarrow\begin{vmatrix}۲&-۱&۳\\۰&m&-۱\\۱&-۲&۳\end{vmatrix}=۰$ $\rightarrow ۲(۳m-۲)-(-۱)(۰+۱)+۳(۰-m)=۰\rightarrow ۶m-۴+۱-۳m=۰\rightarrow ۳m=۳\rightarrow m=۱$	۱
	موفق باشید.	۲۰